AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques
CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué d'un problème d'analyse et d'un problème d'algèbre linéaire indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction et à la présentation des résultats.

1 Problème d'analyse

1.1 Partitions entières pour $k = 2, 3$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $r_k(n) \leq \dfrac{p_k(n)}{k-1}$.

   Correction : Étant donnée une décomposition $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} ib_i$ de l'entier n. Alors il suffit de poser $a_i = ib_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Donc il devient évident que $r_k(n) \leq p_k(n)$. Le facteur $1/(k-1)$ est obtenu par les $k-1$ permutations circulaires des coefficients $(a_1, \ldots, a_k)$.

2. Calculer $r_2(n)$, $p_2(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Correction : On cherche x et y tels que $x + 2y = n$. Supposons que n soit pair et s'écrive $n = 2p$. Alors y peut prendre ses valeurs dans $\{0, \ldots, p\}$ et x est alors fixé ($x = n - 2y$). Donc $r_2(2p) = p + 1$. Lorsque n est impair et s'écrit $n = 2p+1$ alors on a encore $r_2(2p+1) = p+1$. D'où $r_2(n) = E[n/2] + 1$.
   Pour $p_2(n)$, on cherche x et y tels que $x + y = n$ alors y peut prendre ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ et x est alors fixé ($x = n - y$). D'où $p_2(n) = n$.

3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

   Correction : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a convergence de toutes les séries donc

$$\mathcal{R}_3(z) = \sum_{n\geq 0} r_3(n) z^n = \sum_{p\in\mathbb{N}} z^p \sum_{q\in\mathbb{N}} (z^2)^q \sum_{r\in\mathbb{N}} (z^3)^r = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

4. En utilisant l'égalité

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3) = 1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^6,$$

valable pour tout complexe z, montrer que pour tout $n \geq 6$, on a

$$r_3(n) - r_3(n-1) - r_3(n-2) + r_3(n-4) + r_3(n-5) - r_3(n-6) = 0.$$

Correction : On a les calculs suivants :

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & (1-z)(1-z^2)(1-z^3)\mathcal{R}_3(z) \\
& = & \left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} r_3(n)z^n\right)(1-z-z^2+z^4+z^5-z^6) \\
& = & \displaystyle\sum_{n\geq 0} r_3(n)z^n - \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+1} - \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+2} \\
& + & \displaystyle\sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+4} + \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+5} - \sum_{n\geq 0} r_3(n)z^{n+6} \\
& = & \displaystyle\sum_{n\geq 6}(r_3(n) - r_3(n-1) - r_3(n-2) + r_3(n-4) + r_3(n-5) - r_3(n-6))z^n + \sum_{n\leq 5} *_n z^n,
\end{array}$$

où $(*_n)_{n=0,1,2,3,4,5}$ désigne 6 coefficients dont le calcul explicite est inutile.

5. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$

$$\mathcal{R}_3(z) = \frac{17}{72}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-jz} + \frac{1}{9}\frac{1}{1-j^2z}.$$

Correction : On a $(1-z)(1-z^2)(1-z^3) = (1-z)^3(1+z)(1-jz)(1-j^2z)$ d'où la décomposition

$$\mathcal{R}_3(z) = q_1\frac{1}{1-z} + q_2\frac{1}{(1-z)^2} + q_3\frac{1}{(1-z)^3} + q_4\frac{1}{1+z} + q_5\frac{1}{1-jz} + q_6\frac{1}{1-j^2z}.$$

avec

$$\begin{array}{rcl}
q_6 = \displaystyle\lim_{z\to 1/j^2}(1-j^2z)\mathcal{R}_3(z) & = & (1-1/j^2)^3(1+1/j^2)(1-1/j) \\
q_5 = \displaystyle\lim_{z\to 1/j}(1-jz)\mathcal{R}_3(z) & = & (1-1/j)^3(1+1/j)(1-j) \\
q_4 = \displaystyle\lim_{z\to -1}(1+z)\mathcal{R}_3(z) & = & 2^3(1+j)(1+j^2) \\
q_3 = \displaystyle\lim_{z\to 1}(1-z)^3\mathcal{R}_3(z) & = & 2(1-j)(1-j^2) \\
q_2 = \displaystyle\lim_{z\to 1}[(1-z)^3\mathcal{R}_3(z)]' & = & -\dfrac{1}{(1+1)^2}\dfrac{1}{1-j}\dfrac{1}{1-j^2} + \dfrac{1}{1+1}\dfrac{j}{(1-j)^2}\dfrac{1}{1-j^2} + \dfrac{1}{1+1}\dfrac{1}{1-j}\dfrac{j^2}{(1-j^2)^2} \\
q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 & = & \mathcal{R}_3(0) = 1.
\end{array}$$

6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$r_3(n) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{2\cos(2\pi n/3)}{9}.$$

Correction : On développe les fractions en série

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3(z) &= \frac{17}{72}\frac{1}{1-z}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{(1-z)^3}+\frac{1}{8}\frac{1}{1+z}+\frac{1}{9}\frac{1}{1-jz}+\frac{1}{9}\frac{1}{1-j^2z}\\
&= \frac{17}{72}\sum_{n\geq 0} z^n+\frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n+\frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)(n+1)}{2}z^n\\
&+ \frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n+\frac{1}{9}\sum_{n\geq 0} j^n z^n+\frac{1}{9}\sum_{n\geq 0} j^{2n} z^n
\end{aligned}$$

Donc

$$r_3(n)=\frac{17}{72}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+2)(n+1)}{12}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{1}{9}(j^n+j^{2n}).$$

7. En déduire que $r_3(n)=E\left[\frac{(n+3)^2}{12}\right]$ où $E[x]$ est l'entier le plus proche de x, c'est-à-dire le plus petit entier n tel que $|x-n|\leq |x-p|$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
Par exemple, $E[6.8]=7$ *et* $E[2.5]=2$.

Correction : On remarque que

$$r_3(n)=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{9}{12}+\frac{47}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2\cos(2\pi n/3)}{9}=\frac{(n+3)^2}{12}+\frac{-7+9(-1)^n+16\cos(2\pi n/3)}{72}$$

avec $|-7+9(-1)^n+16\cos(2\pi n/3)|\leq 32<36$ donc $\left|r_3(n)-E\left[\frac{(n+3)^2}{12}\right]\right|<1/2.$

1.2 Séries entières rationnelles

Soit $S(z)$ une série entière de rayon de convergence $r>0$:

$$S(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad \text{pour } |z|<r.$$

On admet le théorème suivant :
La série entière $S(z)$ coïncide avec une fonction rationnelle $F(z)$ de la forme $\frac{P(z)}{Q(z)}$, où P et Q sont deux fonctions polynômes telles que Q ne s'annule pas dans le disque ouvert $D(0,r)$ de rayon r, lorsqu'il existe $d\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$ et $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_q\in\mathbb{R}^{q+1}$ (non tous nuls) tels que pour tout $n\geq d$, $\lambda_0 a_n+\lambda_1 a_{n+1}+\cdots+\lambda_q a_{n+q}=0$.

On dit alors que la fonction rationnelle est définie par :
- les conditions initiales : c'est-à-dire la donnée de $q+d$ nombres $(a_0, a_1, \ldots, a_{d+q-1})$
- et la relation de récurrence linéaire donnée par les $q+1$ coefficients $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$.

On admet que deux fonctions rationnelles sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux. Elles sont donc égales si et seulement si les conditions initiales et la relation de récurrence sont identiques.

8. Soit $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ une fonction rationnelle telle que Q ne s'annule pas dans dans le disque ouvert $D(0,r)$, avec $r > 0$. Ses conditions initiales sont constituées de $q+d$ nombres. Montrer qu'il existe une fonction polynôme S de degré $d-1$ tel que

$$F(z) = S(z) + z^d G(z) \text{ pour tout } z \in D(0,r),$$

où G est une fonction rationnelle possédant la même relation de recurrence que F, mais dont les conditions initiales ne sont constituées que de q nombres.

<u>*Correction :*</u> On pose $S = \sum_{n=0}^{d-1} a_n z^n$ et $G = \sum_{n \geq 0} a_{n+d} z^n$ alors $F = S + z^d G$.

La question précédente permet de se limiter au cas $d = 0$. Dans toute la suite du problème, on considérera qu'on est toujours dans ce cas et on notera encore F une telle fonction rationnelle. Les conditions initiales permettent alors de définir la famille de polynômes suivante

$$P_0(X) = 0 \text{ et pour tout } k \in \{1, \ldots, q\}, \quad P_k(X) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n X^n.$$

On note également $R(X) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i}$ le polynôme associé à la relation de reccurence.

9. Montrer que $Q(X) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i X^{q-i} P_i(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à q.

<u>*Correction :*</u> C'est évidemment un polynôme de degré inférieur ou égal à q. Mais son terme de degré q vaut

$$\sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_{i-1} = 0$$

10. Montrer que $\lambda_q \left(P_q(X) - F(X)\right) = \lambda_0 X^q F(X) + \sum_{j=1}^{q-1} \left(\lambda_j X^{q-j} \left[F(X) - P_j(X)\right]\right)$.

Correction : On a la suite des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_q \left(P_q(X) - F(X)\right) &= \lambda_q \left(\sum_{n=0}^{q-1} a_n X^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \right) \\
&= -\lambda_q \sum_{n=q}^{+\infty} a_n X^n \\
&= -\lambda_q \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+q} X^n X^q \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{q-1} \left(\lambda_i a_{n+i} X^{n+i} X^{q-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i X^{q-i} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+i} X^{n+i} \\
&= \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i X^{q-i} \sum_{n=i}^{+\infty} a_n X^n \\
&= \lambda_0 X^q F(X) + \sum_{j=1}^{q-1} \left(\lambda_j X^{q-j} \left[F(X) - P_j(X)\right]\right).
\end{aligned}$$

11. En déduire que $F(X) = Q(X)/R(X)$.

Correction : On met F en facteur dans l'identité précédente d'où

$$F \left(\lambda_q + \lambda_0 X^q + \sum_{j=1}^{q-1} \lambda_j X^{q-j} \right) = FR = \lambda_q P_q + \sum_{j=1}^{q-1} \left(\lambda_j X^{q-j} P_j\right) = Q.$$

12. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{C}^r$ et $(m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que

$$R(X) = (1 - \xi_1 X)^{m_1} \ \cdots \ (1 - \xi_r X)^{m_r}.$$

Correction : Les ξ_i sont les inverses des racines de R comptées avec leur multiplicité m_i.

13. A l'aide d'une décomposition en éléments simples de Q/R, montrer qu'il existe une famille $\left((b_{i,j})_{j=1,\ldots,m_i}\right)_{i=1,\ldots,r}$ telle que

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} b_{i,j} C_{n+j-1}^{j-1} \xi_i^n.$$

Correction : Q/R est une fraction rationnelle avec $\deg Q < \deg R$ donc la décomposition en éléments simples n'a que des parties polaires. On utilise donc la réponse de la question précédente pour écrire :

$$Q/R = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} b_{i,j} \frac{1}{(1 - \xi_i X)^j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \sum_{n \geq 0} b_{i,j} C_{n+j-1}^{j-1} (\xi_i X)^n.$$

Afin de trouver un équivalent de a_n, on ne conserve de la somme précédente que la valeur ξ_i de plus grand module et le terme polynomial de plus haut degré (c'est-à-dire pour $j = m_i$). Dans le cas de plusieurs racines de même module maximal, on ne garde que celle de plus grande multiplicité.

14. Soit i_0 l'indice du ξ_i de plus grand module (ou de plus grande multiplicité en cas de plusieurs racines de même module maximal). Montrer qu'un équivalent de a_n s'écrit sous la forme suivante
$$a_n \sim b_{i_0,m_{i_0}} \xi_{i_0}^n \frac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!}.$$

<u>*Correction :*</u> Il suffit de montrer que $C_{n+m_{i_0}-1}^{m_{i_0}-1} \sim \dfrac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!}$. Or on a
$$C_{n+m_{i_0}-1}^{m_{i_0}-1} = \frac{(n+m_{i_0}-1)!}{n!(m_{i_0}-1)!} = \frac{\prod_{k=1}^{m_{i_0}-1}(n+k)}{(m_{i_0}-1)!} = \frac{n^{m_{i_0}-1}}{(m_{i_0}-1)!} + O(n^{m_{i_0}-2}).$$

15a. On considère la fonction rationelle $\tilde{F}$ définie par les conditions initiales (1,1,2,3,4,5) et la relation de récurrence (-1,1,1,0,-1,-1,1). Trouver une expression explicite de la fonction $\tilde{F}$ en fonction de $\mathcal{R}_3$.

<u>*Correction :*</u> La relation de récurrence est celle donnée par la question 4. De plus, on a
$$\begin{aligned}
r_3(0) = 1 \quad &\leftrightarrow \quad 0\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 0\\
r_3(1) = 1 \quad &\leftrightarrow \quad 1\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 1\\
r_3(2) = 2 \quad &\leftrightarrow \quad 2\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 0\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 2\\
r_3(3) = 3 \quad &\leftrightarrow \quad 3\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 1\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 0\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3 = 3\\
r_3(4) = 4 \quad &\leftrightarrow \quad 4\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 2\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 1\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3\\
&\qquad = 0\times 1 + 2\times 2 + 0\times 3 = 4\\
r_3(5) = 5 \quad &\leftrightarrow \quad 5\times 1 + 0\times 2 + 0\times 3 = 3\times 1 + 1\times 2 + 0\times 3 = 2\times 1 + 0\times 2 + 1\times 3\\
&\qquad = 1\times 1 + 2\times 2 + 0\times 3 = 0\times 1 + 1\times 2 + 1\times 3 = 5
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{F} = \mathcal{R}_3$.

15b. En utilisant la question 14, montrer qu'un équivalent du n-ième coefficient de $\tilde{F}$ (noté $a_n(\tilde{F})$) est donné par
$$a_n(\tilde{F}) \sim \frac{n^2}{12}$$
Ce résultat est-il en conformité avec le résultat de la question 8 ?

<u>*Correction :*</u> Avec les notations de la question 14, on choisit $i_0 = 1$ l'indice de la racine 1 de multiplicité 3 d'où
$$a_n(\tilde{F}) \sim b_{1,3}\ 1^n\ \frac{n^2}{2!}$$

Or $b_{1,3}$ est le coefficient q_3 de la question 5 qui vaut $\frac{1}{6}$.
Évidemment, on est en conformité avec la question 8 puisque

$$r_3(n) = E\left[\frac{(n+3)^2}{12}\right] = \frac{n^2}{12} + O(n) \sim \frac{n^2}{12} \sim a_n(\tilde{F}).$$

1.3 Partitions entières pour k quelconque

16. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, $\mathcal{R}_k(X) = \frac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}$ puis

$$\mathcal{R}_k(z) = \frac{1}{1-z} \cdots \frac{1}{1-z^k}.$$

<u>*Correction :*</u> On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k(z) &= \sum_{n\geq 0} r_k(n) z^n = \sum_{n\geq 0} \sum_{b_1+\cdots+kb_k=n} z^{b_1+\cdots+kb_k} \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{b_k=1}^{n/k} \sum_{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}=n-kb_k} z^{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}} z^{kb_k} \\
&= \sum_{b_k\geq 0} \sum_{n\geq kb_k} \sum_{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}=n-kb_k} z^{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}} z^{kb_k} \\
&= \sum_{b_k\geq 0} z^{kb_k} \sum_{m\geq 0} \sum_{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}=m} z^{b_1+\cdots+(k-1)b_{k-1}} \\
&= \left(\sum_{b_k\geq 0} z^{kb_k}\right) \mathcal{R}_{k-1}(z) = \frac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient directement $\mathcal{R}_k(z) = \frac{1}{1-z} \cdots \frac{1}{1-z^k}$. L'initialisation étant par exemple fournie par la question 3.

17. En déduire que

$$r_k(n) = r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + r_{k-1}(n-2k) + \cdots$$

où on utilise la convention : $r_k(n-ik) = 0$ si $n < ik$.

<u>*Correction :*</u> Puisque $\mathcal{R}_k(z) = \frac{\mathcal{R}_{k-1}(z)}{1-z^k}$ alors en reindexant le produit des deux séries, on

obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} r_k(n)z^n &= \left(\sum_{n\geq 0} r_{k-1}(n)z^n\right)\sum_{i\geq 0} z^{ki} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{ki+n=p} r_{k-1}(n)z^{n+ki} \\
&= \sum_{p\geq 0}\sum_{i=0}^{p/k} r_{k-1}(p-ki)z^p \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n/k} r_{k-1}(n-ki)z^n
\end{aligned}$$

18. En utilisant le fait que la fonction $x \mapsto x^{k-1}$ est convexe, montrer que pour tout $k \geq 2$

$$x^{k-2} \geq \frac{1}{k(k-1)}\left(x^{k-1} - \max\left\{(x-k)^{k-1}; 0\right\}\right), \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

<u>*Correction :*</u> La dérivée au point x est plus grande que l'accroissement entre $x-k$ et x ou qu'entre 0 et x si $x-k<0$. Lorsque $x=0$ l'inégalité est triviale. Soit $x>0$, lorsque $x \geq k$ on a bien

$$(k-1)x^{k-2} \geq \frac{(x^{k-1}-(x-k)^{k-1})}{x-(x-k)} = \frac{(x^{k-1}-(x-k)^{k-1})}{k},$$

et lorsque $0<x<k$, on a

$$(k-1)x^{k-2} \geq \frac{(x^{k-1}-0)}{x-0} \geq \frac{(x^{k-1}-0)}{k}.$$

19. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$r_k(n) \geq \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

<u>*Correction :*</u> Lorsque $k=1$ on a bien $r_1(n) = 1 \geq \dfrac{n^0}{1!0!} = 1$.

Ou même $k=2$, on a $r_2(n) = [n/2]+1 \geq \dfrac{n^1}{2!1!} = \dfrac{n}{2}$.

Supposons l'inégalité vraie au rang $k-1$ (pour $k \geq 2$ ou même 3) alors par la question 17 et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
r_k(n) &= r_{k-1}(n) + r_{k-1}(n-k) + r_{k-1}(n-2k) + \cdots \\
&\geq \frac{n^{k-2}}{(k-1)!(k-2)!} + \frac{(n-k)^{k-2}}{(k-1)!(k-2)!} + \cdots \\
&\geq \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}\left(\frac{n^{k-1}-(n-k)^{k-1}}{k(k-1)} + \frac{(n-k)^{k-1}-(n-2k)^{k-1}}{k(k-1)} + \cdots\right) \\
&\geq \frac{1}{(k-1)!(k-2)!}\frac{n^{k-1}-0}{k(k-1)} = \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.
\end{aligned}$$

2 Formes quadratiques

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$ de la forme

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E, on note $U \oplus V$ l'espace qui est la somme directe de U et V, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $U + V$ sous la condition $U \cap V = \{0\}$.

2.1 Diagonalisation

1. Soit q une forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ (appelée forme polaire de q) telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout x de E. Vérifier en particulier que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)).$$

Correction : Pour l'existence, on pose φ comme dans la définition, alors $\varphi(x, x) = \dfrac{1}{4}(q(2x) - q(0)) = q(x)$. Pour l'unicité, s'il existait $\psi \neq \varphi$ telle que $\psi(x, x) = \phi(x, x)$ alors

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)) = \frac{1}{4}(\psi(x + y, x + y) - \psi(x - y, x - y)) \\
&= \frac{1}{4}(\psi(x, x) + 2\psi(x, y) + \psi(y, y) - \psi(x, x) + 2\psi(x, y) - \psi(y, y)) = \psi(x, y).
\end{aligned}$$

On dit que la forme bilinéaire symétrique φ est positive (resp. définie positive) si, pour tout x de E, $\varphi(x, x) \geq 0$ (resp. si, pour tout $x \neq 0$, $\varphi(x, x) > 0$). On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j=1,\ldots,n}$.

2. Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = {}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)P.$$

Correction : Par définition $f_j = \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} e_i$ d'où

$$\begin{aligned}
\left({}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)P\right)_{kl} &= \sum_{i=1}^{n} ({}^tP)_{k,i} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))_{i,j} P_{j,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_{i,k} \sum_{j=1}^{n} P_{j,l} \varphi(e_i, e_j) \\
&= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} P_{i,k} e_i, \sum_{j=1}^{n} P_{j,l} e_j\right) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi))_{k,l}\,.
\end{aligned}$$

Dans la suite du problème, on appelle rang de la forme quadratique q (associée à la forme bilinéaire symétrique φ) le rang de la matrice de φ dans une base de E. On dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale pour φ (ou de façon équivalente pour la forme quadratique associée q) si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Etant donnés x et y deux vecteurs de E, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $\varphi(x, y)$ en fonction des x_i et des y_i.

   Correction : On a évidemment

   $$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))_{i,j} y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \alpha_i.$$

4. Soit f_1 un vecteur de E tel que $\varphi(f_1, f_1) \neq 0$. On note $\varphi_1 : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie pour tout x de E par $\varphi_1(x) = \varphi(f_1, x)$, et $F = \ker(\varphi_1)$. Montrer que $E = \mathbb{R}f_1 \oplus F$ où $\mathbb{R}f_1$ désigne le sous espace vectoriel de E de dimension 1 engendré par f_1.

   Correction : Soit $x \in \mathbb{R}f_1 \cap F$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda f_1$ d'où $0 = \varphi_1(x) = \varphi(f_1, \lambda f_1) = \lambda \varphi(f_1, f_1)$. Nécessairement $\lambda = 0$ doù $\mathbb{R}f_1 \cap F = \{0\}$. Soit maintenant $z \in E$, on pose $y = z - \dfrac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} f_1$ et $x = \dfrac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} f_1$. Ainsi $z = x + y$ avec $x \in \mathbb{R}f_1$. Il suffit donc pour conclure de montrer que $y \in F$:

   $$\varphi_1(y) = \varphi\left(f_1, z - \frac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} f_1\right) = \varphi(f_1, z) - \varphi(f_1, f_1)\frac{\varphi(z, f_1)}{\varphi(f_1, f_1)} = 0.$$

5. En déduire que toute forme bilinéaire symétrique sur E admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

   Correction : Par raisonnement par récurrence, on voit de suite que

   $$E = \oplus_{i=1}^{p} \mathbb{R} f_i + \ker \varphi_p$$

où $\varphi_p : \ker \varphi_{p-1} \to \mathbb{R}$ avec $\varphi_p(x) = \varphi(f_p, x)$, si on est capable de trouver $f_1, \ldots, f_p$ tels que $\varphi(f_i, f_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 1, \ldots, p$. Lorsqu'on ne peut plus exhiber un tel élément, c'est que φ est identiquement nulle sur $G := \ker \varphi_p$. En effet, par la question 1, si pour tout $x \in G$, $\varphi(x,x) = q(x) = 0$, alors $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in G^2$. La matrice de φ sur G est alors la matrice identiquement nullle (donc diagonale). Et bien évidemment, la matrice de φ est diagonale sur $\oplus_{i=1}^p \mathbb{R} f_i$.

6. Déterminer une telle base pour la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

(On pourra commencer par préciser la forme bilinéaire symétrique φ associée à q et la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$).

<u>*Correction :*</u> Par la question 1, on sait que

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) \\
&= \frac{1}{4}((x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_1+y_1)(x_3+y_3) + (x_1+y_1)(x_4+y_4) \\
&\quad +(x_2+y_2)(x_3+y_3) + (x_2+y_2)(x_4+y_4) + (x_3+y_3)(x_4+y_4) \\
&\quad -(x_1-y_1)(x_2-y_2) + (x_1-y_1)(x_3-y_3) + (x_1-y_1)(x_4-y_4) \\
&\quad +(x_2-y_2)(x_3-y_3) + (x_2-y_2)(x_4-y_4) + (x_3-y_3)(x_4) - y_4)) \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_1y_4 + x_4y_1 \\
&\quad +x_2y_3 + x_3y_2 + x_2y_4 + x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{canonique}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche un vecteur f_1 tel que $\varphi(f_1, f_1) \neq 0$. Un tel vecteur (le plus simple) est donné par $f_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. En effet, il est tel que $\varphi(f_1, f_1) = \frac{1}{2}(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 6 \neq 0$ et la forme φ_1 associée est $x \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. On itère le processus en posant $f_2 = -e_1 - e_2 + e_3 + e_4$, $f_3 = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ et $f_4 = -e_1 + e_2 + e_3 - e_4$. On note $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On aurait aussi pu calculer $\det(2\mathrm{Mat}_{canonique}(\varphi) - \lambda I_d)$, mais ce n'est pas l'esprit du sujet.

7. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E et deux entiers p et q tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} J_p & 0 & 0 \\ 0 & -J_q & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où J_r désigne une matrice identité de taille $r \times r$.

<u>*Correction :*</u> On diagonalise, puis en renormalisant la base, on trouve naturellement la décomposition.

2.2 Sous-espaces totalement isotropes

On appelle noyau de la forme bilinéaire symétrique φ (noté ker (φ)) le noyau de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ dans une base $\mathcal{B}$ quelconque. On dit que φ est non-dégénérée si ker $(\varphi) = \{0\}$.

On appelle signature de φ le couple d'entiers $(n_+; n_-)$ où n_+ est la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel F de E tel que la restriction de φ à F soit définie positive, et n_- la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel G de E telle que la restriction de φ à G soit définie négative.

Dans les questions suivantes, on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale pour φ, et $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice de φ dans $\mathcal{B}$, avec $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, \dots, p$, $\alpha_i < 0$ pour $i = p+1, \dots, p+q$, et $\alpha_i = 0$ sinon.

8a. Montrer que $p \leq n_+$.

<u>*Correction :*</u> Si $p > n_+$ alors la base $(e_1, \dots, e_{p+1})$ génère un espace de dimension $p+1$ sur lequel φ est définie positive. Ce qui est en contradiction avec la définition de n_+.

8b. Soit F_+ un sous-espace vectoriel de E de dimension n_+ tel que la restiction de φ à F_+ (notée $\varphi|_{F_+ \times F_+}$) soit définie positive, et $G = \mathrm{Vect}\ (e_{p+1}, \dots e_n)$. Montrer que F_+ et G sont en somme directe. En déduire que $n_+ \leq p$.

<u>*Correction :*</u> Soit $x \in F_+ \cap G$ alors il existe $(\lambda_i)_{i=p+1,\dots,n}$ tels que

$$0 \leq \varphi(x, x) = \varphi\left(\sum_{i=p+1} n\lambda_i e_i, \sum_{i=p+1} n\lambda_i e_i\right) = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 \leq 0.$$

Comme φ est définie positive sur F_+ alors on en déduit $F_+ \cap G = \{0\}$ et les espaces sont bien en somme directe. Nécessairement $n \geq dim(F_+) + dim(G) = n_+ + (n - (p+1) + 1)$ donc $n_+ \leq p$.

8c. En déduire le théorème de Sylvester : Dans toute base orthogonale de E, la matrice de φ possède n_+ éléments strictement positifs et n_- éléments strictements négatifs.

<u>*Correction :*</u> Soit $\mathcal{C}$ une base de E orthogonale pour φ. On peut noter $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice de φ dans $\mathcal{C}$, avec $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, \dots, p$, $\alpha_i < 0$ pour $i = p+1, \dots, p+q$, et $\alpha_i = 0$

sinon. Nécessairement $n_+ = p$ et par analogie $n_- = q$. D'où le théorème de Sylvester.

9. Exprimer le rang de φ en fonction de sa signature, et déterminer la signature d'une forme bilinéaire définie positive.

   Correction : Avec les notations précédentes, le rang de φ vaut $p + q = n_+ + n_-$. Pour une matrice définie positive, le rang vaut n d'où $n_+ + n_- = n$. Et 0 est la dimension maximale de tout espace sur lequel la forme définie positive serait définie négative. On en déduit que la signature de toute forme bilinériare définie positive est $(n, 0)$.

On appelle cône isotrope de la forme quadratique q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E, q(x) = 0\}.$$

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour la forme bilinéaire symétrique φ si $\varphi(x, y) = 0$. Pour A une partie de E, on appelle orthogonal de A selon φ l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in E, \forall x \in A \quad \varphi(x, y) = 0\}.$$

10a. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Correction : $A^\perp$ est stable par addition car φ est linéaire par rapport à la seconde variable. Il est également stable par produit extérieur car φ est homogène par rapport à la seconde variable. Étant de plus non vide, il est un sous-espace vectoriel de E.

10b. Montrer que pour toute partie F de E, on a

$$F \subset F^{\perp\perp}.$$

Correction : Soit $x \in F$, alors soit $y \in F^\perp$ on a bien $\varphi(x, y) = 0$. Donc $x \in F^{\perp\perp}$.

10c. Montrer que pour A et B deux parties de E on a l'implication suivante

$$A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

Correction : Supposons que $A \subset B$ alors soit $x \in B^\perp$, montrons que $x \in A^\perp$. Pour cela, prenons $z \in A$ quelconque et montrons que $\varphi(x, z) = 0$. Or comme $x \in B^\perp$, alors pour tout $y \in B$ on a $\varphi(x, y) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in B$, cela est *a fortiori* vrai pour tout $z \in A$.

On appelle sous-espace totalement isotrope (SETI en abrégé) un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout x de F, $q(x) = 0$. On appelle SETI maximal (SETIM en abrégé) un sous espace totalement isotrope G vérifiant la propriété : si F est un SETI contenant G, alors $F = G$ (G est maximal pour l'inclusion).

Soit F un SETI.

11a. Montrer que $F \subset F^{\perp}$.

<u>*Correction :*</u> Soit $x \in F$ et $y \in F$. Il s'agit de montrer que $\varphi(x, y) = 0$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors il est stable par addition, donc $x + y \in F$ et $x - y \in F$, d'où $q(x + y) = 0 = q(x - y)$. On conclut en écrivant $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)) = 0 + 0$.

11b. Montrer que dim $F \leq n - \dfrac{r}{2}$, où r est le rang de la forme quadratique q.

<u>*Correction :*</u> Soit s la dimension de F. On note $(f_1, \ldots, f_s)$ une base de F. On complète ensuite cette base en une base de E qu'on note alors $\mathcal{C}$. La matrice de φ dans cette base est alors donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0_s & *_{s,n-s} \\ *_{n-s,s} & *_{n-s,n-s} \end{pmatrix}$$

où 0_s désigne la matrice de taille $s \times s$ identiquement nulle et $*_{p,q}$ désigne une matrice quelconque de taille $p \times q$. Le rang étant inchangé dans toute base, le rang de cette matrice est r. Mais nécessairement son rang est inférieur au rang de la matrice du coin en bas à droite additionné au rang de la matrice du coin en haut à droite. Ainsi $r \leq rang(*_{n-s,n-s}) + rang(*_{s,n-s}) \leq n - s + min(s, n - s)$. Ainsi $r \leq n - s + n - s$ d'où $s \leq n - \dfrac{r}{2}$.

11c. Montrer que F est inclus dans un SETI maximal.

<u>*Correction :*</u> Soit F un SETI. Si c'est un SETIM c'est fini. Supposons donc que F ne soit pas un SETIM. Alors il existe H un SETI qui contient F tel que $F \neq H$ donc tel que $F \subsetneq H$. Cette opération peut donc se répéter. Mais elle se termine nécessairement lorsque la dimension de H vaut $n - r/2$ (ou avant). Si elle se termine avant, c'est fini, sinon elle se termine lorsque dim $(H) = n - r/2$. Dans ce cas, soit H est un SETIM qui contient F et c'est terminé, soit il existe G un SETI qui contient H tel que $H \subsetneq G$ donc dim $(G) > n - \dfrac{r}{2}$, ce qui est impossible.

On suppose que φ est non dégénérée. Etant donnés deux SETIM G_1 et G_2, on note $F = G_1 \cap G_2$, S_1 un supplémentaire de F dans M_1 (de sorte que $F \oplus S_1 = G_1$) et S_2 un supplémentaire de F dans M_2 (de sorte que $F \oplus S_2 = G_2$).

12a. Montrer que $S_1 \cap S_2^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2 = \{0\}$. En déduire que dim $G_1 =$ dim G_2.

<u>*Correction :*</u> Soit $x \in S_1 \cap S_2^{\perp}$ alors $x \in G_1$. De plus, tout $y \in G_2$ se décompose en $z + t$ avec $z \in F$ et $t \in S_2$ d'où $\varphi(x, y) = \varphi(x, z) + \varphi(x, t)$. Comme $z \in F$ alors $z \in G_1$ qui est un SETI donc $\varphi(x, z) = 0$. Et comme $x \in S_2^{\perp}$ et $t \in S_2$, alors $\varphi(x, t) = 0$. Donc $x \in G_1 \cap G_2^{\perp}$. Supposons que $x \neq 0$ alors on peut définir $H = G_2 + \mathbb{R}x$. C'est un SETI car tout élément $h \in H$ s'écrit $g + \lambda x$ d'où $\varphi(h, h) = \varphi(g, g) + 2\lambda\varphi(g, x) + \varphi(x, x)$. Le premier et le dernier terme sont nuls car G_1 et G_2 sont des SETI et le deuxième terme est nul car $x \in G_2^{\perp}$. De plus comme $x \notin G_2$ (en effet $x \in G_2$ implique $x \in G_1 \cap G_2 = F$ donc $x \in F \cap S_1$ qui sont supplémentaires et ceci imposerait $x = 0$) alors on a construit un SETI qui contient strictement G_2 ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant que dim $(S_1) >$ dim $(S_2) = s$ avec $(e_1, \ldots, e_s)$ une base de S_2 alors on pose

$$\psi : \begin{array}{ccc} S_1 & \rightarrow & \mathbb{R}^s \\ x & \mapsto & (\varphi(x,e_1), \ldots, \varphi(x,e_s)). \end{array}$$

Le théorème du rang nous donne

$$\text{dim } (S_1) = \text{dim } (\ker(\psi)) + rang(\psi) = \text{dim } (S_1 \cap S_2^{\perp}) + rang(\psi) \leq s.$$

Donc dim $(S_1) =$ dim (S_2) et par suite dim $(G_1) =$ dim (G_2).

12b. Tous les SETIM ayant donc la même dimension, on appelle indice de la forme quadratique q la dimension commune de tous les SETIM. Calculer l'indice de q en fonction de sa signature $(n_+; n_-)$.

<u>*Correction :*</u> Soit une base qui orthonormalise φ comme démontré en question 7. φ est non dégénérée donc $n_+ + n_- = n$, ainsi on peut noter cette base $(e_1, \ldots, e_{n_+}, f_1, \ldots, f_{n_-})$. On pose $d = min(n_+, n_-)$ et on construit G le SETI engendré par $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d)$. Montrons que ce SETI est maximal pour conclure que l'indice est donc $min(n_+, n_-)$. Supposons que $n_+ = d$ (le cas $n_- = d$ se traite de la même manière).

On complète la famille $(e_1+f_1, \ldots, e_d+f_d)$ avec les éléments de la base $(e_1, \ldots, e_{n_+}, f_1, \ldots, f_{n_-})$. Cette nouvelle base peut donc s'écrire $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d, e_1, \ldots, e_d, f_{d+1}, \ldots, f_{n_-})$. Soit F un SETI contenant G. Si $G \subsetneq F$ alors il existe un élément g tel que $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d, g)$ soit une famille libre de F. Donc il existe $(\mu_i)_{i=1,\ldots,d}$ et $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n_-}$ tels que

$$g = \sum_{i=1}^{d} \mu_i(e_i + f_i) + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i + \sum_{i=d+1}^{n_-} \lambda_i f_i.$$

Les conditions $(\varphi(g, e_k + f_k) = 0)_{k=1,\ldots,d}$ imposent $(\lambda_k = 0)_{k=1,\ldots,d}$. Et la condition $\varphi(g,g) = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \mu_i\mu_j\varphi(e_i + f_i, e_j + f_j) + 2\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=d+1}^{n_-} \mu_i\lambda_j\varphi(e_i + f_i, f_j) + \sum_{i=d+1}^{n_-}\sum_{j=d+1}^{n_-} \lambda_i\lambda_j\varphi(f_i, f_j) \\ &= 0 + 0 - \sum_{i=d+1}^{n_-} \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Nécessairement tous les $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n_-}$ sont donc nuls et la famille $(e_1 + f_1, \ldots, e_d + f_d, g)$ n'est pas libre, ce qui fournit une contradiction.

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs, qui converge vers une limite *l*.

On pose : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, où *Ln* désigne le logarithme népérien.

Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n.

$\sum\limits_{k=0}^{n} v_k = u_{n+1} - u_0$ qui converge vers $l - u_0$.

$\sum\limits_{k=0}^{n} w_k = Ln\, u_{n+1} - Ln\, u_0$ qui converge vers $Lnl - Lnu_0$ si *l* est non nulle et qui est divergente si *l*=0.

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, dont le premier terme u_0 est strictement compris entre 0 et 1.

- Etudier la convergence de la suite (u_n).

On a : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$,donc la suite est décroissante et on vérifie par récurrence que : $0 < u_n < 1$. La suite étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite *l* solution de l'équation : $l = f(l)$, à savoir *l*=0.

- En déduire la convergence des séries de terme général : u_n^2, $Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et u_n.

On a : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$ qui converge vers $-u_0$.

Puisque *l*=0, la série de terme général $Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente (questions 1 et 2).

Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$, on a : $Ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \approx -u_n$ et ces deux séries sont de même nature donc la série de terme général u_n est divergente.

Exercice n° 2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels et f une application de E dans F qui vérifie les deux assertions suivantes :

$$(1)\ \forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(2)\ \forall K > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\| < 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq K$$

1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.

$f(0+0) = 2\,f(0)$, donc $f(0) = 0$ et $f(x-x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, donc f est impaire.

2. Montrer que $\forall x \in E, \forall \lambda \in Q, \quad f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$, où Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

On vérifie par récurrence que : $f(nx) = n\, f(x)$ pour tout entier n.

Pour q entier non nul, $f(x) = f(q \times \frac{x}{q}) = qf(\frac{x}{q})$, donc $f(\frac{x}{q}) = \frac{1}{q}\, f(x)$

Pour $\frac{p}{q} \in Q,\ f(\frac{p}{q}x) = f(p \times \frac{x}{q}) = pf(\frac{x}{q}) = \frac{p}{q}\, f(x)$

3. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers zéro, calculer la limite de la suite $f(x_n)$.

Par hypothèse f est bornée sur la boule unité et (x_n) converge vers zéro, donc :

$$\forall\, 0 < \varepsilon < 1,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x_n)\| \leq K,$$

Pour $\lambda \in Q^+$ et $\|\lambda x_n\| \leq 1 \quad f(\lambda x_n) = \lambda\, f(x_n)$ et $\lambda\, \|f(x_n)\| \leq K$.

D'où $\|f(x_n)\| \leq K/\lambda$ et quand λ tend vers l'infini, $f(x_n)$ tend vers zéro.

4. Montrer que f est continue en 0 et en déduire que f est continue et linéaire.

D'après la question précédente, f est continue au voisinage de zéro.
Soit une suite (x_n) qui converge vers x, alors $f(x_n - x) = f(x_n) - f(x)$ converge vers 0 et f est continue sur R.

Comme l'ensemble Q est dense dans R : $\forall \lambda \in R,\ \exists \lambda_p \in Q,\ \lim_{p \to \infty} \lambda_p = \lambda$.

On a (question 3) : $f(\lambda_p\, x) = \lambda_p\, f(x)$ et par passage à la limite, puisque f est continue :

$$f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x) \text{ et } f \text{ est linéaire.}$$

Exercice n° 3

1. Pour t nombre réel compris strictement entre 0 et 1, calculer l'intégrale suivante :

$$A(t) = 2\int_0^1 Max(\omega(1-t), t(1-\omega))d\omega$$

On a $0 < t < 1$, et $\omega(1-t) < t(1-\omega)$ pour $\omega < t$, donc

$$A(t) = 2\int_0^t t(1-\omega)d\omega + 2\int_t^1 \omega(1-t)d\omega = 2\left[t\omega - t\omega^2/2\right]_0^t + 2\left[(1-t)\omega^2/2\right]_t^1, \text{ puis}$$

$$A(t) = t^2 - t + 1$$

2. Pour x, y>0, on pose : $V(x,y) = 2\int_0^1 Max(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y})d\omega$

Calculer cette intégrale.

On a : $\frac{\omega}{x} < \frac{1-\omega}{y}$ si et seulement si $\omega < \frac{x}{x+y}$.

$$V(x,y) = 2\int_0^{x/(x+y)} \frac{1-\omega}{y}d\omega + 2\int_{x/(x+y)}^1 \frac{d\omega}{x}\left[\frac{\omega - \omega^2/2}{y}\right]_0^{x/(x+y)} + 2\left[\frac{\omega^2/2}{x}\right]_{x/(x+y)}^1$$

$$V(x,y) = 2\left(\frac{x}{y(x+y)} - \frac{x^2}{2y(x+y)^2}\right) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{(x+y)^2}\right)$$

$$V(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + xy}{xy(x+y)^2} = \frac{x+y}{xy} - \frac{1}{(x+y)}$$

Exercice n° 4

Soient E un espace vectoriel normé réel et f une fonction numérique définie sur E. On dit que f est quasi-convexe si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y))$$

1. Montrer que f est quasi-convexe si et seulement si l'ensemble $A_\alpha = \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.

(1) Si f est quasi-convexe, $\forall x, y \in A_\alpha$, $f(x) \leq \alpha$, $f(y) \leq \alpha$.
Pour tout $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq Sup(f(x), f(y)) \leq \alpha$ et A_α est convexe.

(2) Réciproquement, si A_α est convexe.

Pour $x, y \in E$, et $\lambda \in [0,1]$, on choisit $\alpha = Sup(f(x), f(y))$
et $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq Sup(f(x), f(y))$

2. Montrer que toute fonction monotone est quasi-convexe.
Si *f* est monotone, alors $A_\alpha = \{x \in E \,/\, f(x) \leq \alpha\}$ est un intervalle, donc convexe et *f* est quasi convexe.

3. Donner un exemple de fonction quasi-convexe, non convexe.
Par exemple le logarithme ou la racine carrée.

4. Soit f_i une famille de fonctions numériques quasi-convexes définies sur *E*, telle que, pour tout *x* de *E*, $\underset{i}{Sup}\, f_i(x) < +\infty$. Montrer que la fonction $g(x) = \underset{i}{Sup}\, f_i(x)$ est quasi-convexe.
Pour $x \in E$, on vérifie que : $\{x \in E \,/\, g(x) \leq \alpha\} = \bigcap_i \{x \in E \,/\, f_i(x) \leq \alpha\}$ et une intersection d'ensembles convexes est convexe, donc $g(x) = \underset{i}{Sup}\, f_i(x)$ est quasi-convexe.

5. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x, y \in X, \; f(y) \leq f(x) \Rightarrow df(x)(y-x) \leq 0$$

$\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $f(y) \leq f(x)$, on a : pour tout $t \in [0,1]$, $f(x + t(y-x)) \leq f(x)$.

On pose, pour $t \in R$, $t \neq 0$, $\varepsilon(t) = \dfrac{f(x+t(y-x)) - f(x) - df(x)(t(y-x))}{\|t(y-x)\|}$.

Puisque *f* est différentiable en *x*, $\underset{t \to 0}{Lim}\, \varepsilon(t) = 0$. On en déduit que :
$t[\varepsilon(t) \times \|(y-x)\| + df(x)(y-x)] \leq 0$, puis en simplifiant par *t* et par passage à la limite, on obtient l'inégalité demandée.

6. Soient *X* un sous ensemble convexe ouvert non vide de *E* et *f* une fonction numérique deux fois différentiable définie sur *X*. On suppose que *f* quasi-convexe, montrer que :

$$\forall x \in X, \; \forall h \in E, \; df(x)(h) = 0 \Rightarrow d^2 f(x)(h,h) \geq 0$$

Faisons une démonstration par l'absurde : $\exists x \in X$, $\exists h \in E$, $df(x)(h) = 0 \; et \; d^2 f(x)(h,h) < 0$.
On pose : $\varphi(t) = f(x + th)$ qui est définie sur un intervalle $]-a, a[$, pour *a* suffisamment petit (de façon que φ soit définie sur *X* ,convexe ouvert).

D'après la formule de Taylor :

$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi^{'}(0)+\frac{t^2}{2}\varphi^{''}(0)+o(t^2)$. En particulier pour t petit et positif :

(1) $\varphi(t)-\varphi(0)= f(x+th)-f(x)<0$ et $\varphi(-t)-\varphi(0)= f(x-th)-f(x)<0$

Remarquons que $x=\frac{1}{2}(x+th)+\frac{1}{2}(x-th)$. Puisque *f* est quasi convexe, on en déduit que : $f(x)\leq Sup(f(x+th),f(x-th))$, ce qui contredit (1).

Exercice n° 5

On considère la suite $(u_n(\lambda))$ pour un paramètre réel λ strictement positif par :

$$u_n(\lambda)=\frac{e^{nLn\lambda-\lambda}}{n!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n(\lambda))$ est convergente pour tout $\lambda>0$.

$\frac{u_{n+1}(\lambda)}{u_n(\lambda)}=\frac{\lambda}{n+1}<1$ pour n grand, donc la suite st décroissante et positive, donc elle converge.

2. Déterminer le maximum de $(u_n(\lambda))$ pour n fixé.

La dérivée de $(u_n(\lambda))$ est égale à $u_n^{'}(\lambda)=\frac{1}{n!}(\frac{n-x}{x})e^{nLnx-x}$. Le maximum est atteint pour x=n et vaut $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$

3. Peut-on prolonger $(u_n(\lambda))$ par continuité en $\lambda=0$?

On a $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{e^{nLn\lambda-\lambda}}{n!}=0$ et on peut prolonger par zéro.

Exercice n° 6

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs $x_1,...,x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

1. Montrer que pour tout nombre réel strictement positif :

$$P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}\text{ (inégalité de Markov),}$$

où *P* désigne la probabilité et *E(X)* l'espérance mathématique de *X*.

(1) Si toutes les valeurs $x_1,...,x_n$ sont strictement inférieures à a, alors : $P(X \geq a) = 0$ et l'inégalité est évidente.

Dans le cas contraire, il existe au moins une plus petite valeur x_k supérieure ou égale à a.

(2) Si $k = 1$, toutes les valeurs e X sont supérieures à a et $P(X \geq a) = 1$, ainsi que : $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i \geq a \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$ et $E(X) \geq a$ et l'inégalité est évidente.

(3) Si k>1, alors $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = x_i)\,x_i + \sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)\,x_i$.

On peut minorer le deuxième terme : $\sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)\,x_i \geq a \sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)$ et $\sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)\,x_i \geq a\,P(X \geq a)$, d'où $E(X) \geq a\,P(X \geq a)$ et comme a>0 , $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

2. Un fabricant produit en moyenne 20 produits par semaine. Cette production est plus ou moins aléatoire, car elle dépend des fournisseurs et de la disponibilité des matières premières. Quelle est, au plus, la probabilité de produire au moins 40 objets par semaine ?

D'après l'inégalité de Markov : $P(X \geq 40) \leq \dfrac{1}{2}$. Le producteur a au plus une chance sur deux de doubler sa production.

3. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$$

Où $\sigma(X)$ correspond à l'écart-type de X.

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$.

$P((X - E(X))^2) \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2}$ et $E((X - E(X))^2) = \sigma^2(X)$;

Et par croissance de la racine carrée, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}$

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice I

1. Le polynôme P peut, dans le meilleur des cas, avoir 1 ou -1 comme racines. En 1, si $P(1) \neq 0$, on a

$$\frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \sim_{x\to 1, x<1} \frac{P(1)}{\sqrt{2(1-x)}}$$

et cette fonction est intégrable sur $[1/2, 1]$, par exemple. Pareil en -1.

2. Il est facile de vérifier que pour tous P, $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $w_\theta(P+\lambda Q) = w_\theta(P) + \lambda w_\theta(Q)$.

3. Il suffit de considérer P dans $\{1, X, X^2, X^3\}$, successivement, et d'écrire le système linéaire de 4 équations :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 3\cdot c (= \pi) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1+x_2+x_3)(=0) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(=\frac{\pi}{2}) \\
\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= c(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(=0).
\end{aligned}$$

Solution : $\theta = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice II

1. Pour $n=1$, nous avons $P_1(X) = 1+X$ et $P_2(X) = 1+X+X\cdot 1 = 1+2X$ des polynômes de degré 1. Si l'hypothèse est vérifiée jusqu'à n, alors le degré de $P_{2n+1}(X) = P_{2n}(X) + XP_{2n-1}(X)$ est n, ainsi que celui de $P_{2n+2}(X) = P_{2n+1}(X) + XP_{2n}(X)$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 - r - X = 0$. Si $1+4X \neq 0$, elle admet deux racines distinctes $r_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+4X})/2$. Il vient $P_n(X) = Ar_1^n + Br_2^n$ et, en utilisant P_0 et P_1, on obtient

$$P_n(X) = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}, \text{ si } X \neq -\frac{1}{4}.$$

Si $1+4X=0$, l'équation caractéristique admet l'unique racine $r_0 = \frac{1}{2}$. Il vient $P_n(-\frac{1}{4}) = (A+Bn)r_0^n = \left(1+\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2^n}$.

3. Comme $P_n(-\frac{1}{4})$ ne s'annule pas, il suffit de considérer $P_n(X) = 0$ pour $X \neq -\frac{1}{4}$. Ceci implique que

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1, \text{ avec } \frac{r_1}{r_2} \neq 1.$$

Donc, $r_1/r_2 = \exp\left(\frac{2\pi ik}{n+1}\right)$, pour k entre 1 et n (les racines $(n+1)$ème de l'unité, sauf la racine 1).

Nous pouvons, par exemple, utiliser les propriétés $1 = r_1 + r_2 = r_2(1 + r_1/r_2)$ et $-X = r_1 \cdot r_2 = r_2^2(r_1/r_2)$, déduites de l'équation caractéristique, pour obtenir

$$x_k = -\frac{r_1/r_2}{(1 + r_1/r_2)^2} = \frac{-1}{\left(\exp\left(\frac{-ik\pi}{n+1}\right) + \exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\right)^2} = \frac{-1}{4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

Pour k allant de 1 à n, nous avons $\frac{k\pi}{n+1} \in \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{n\pi}{n+1}\right] \subseteq]0, \pi[$, donc nous avons trouvé les n racines réelles du polynôme P_n.

Exercice III

1. Avec le changement de variable $y = 1 - \frac{x}{n}$, on a $I_n = n \int_0^1 \sqrt{1 + y^n}\, dy$. Si on note $f_n(y) = \sqrt{1 + y^n}$ pour $y \in [0, 1]$, alors elle est dominée par $\varphi(y) = \sqrt{2}$ pour $y \in [0, 1]$, qui est intégrable sur ce domaine. De plus, $lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$, où $f(y) = 1$ si $y \in [0, 1[$ et $f(1) = \sqrt{2}$. Par le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 f_n(y)dy \to \int_0^1 f(y)dy = 1$, quand $n \to \infty$. Ceci permet de conclure que $I_n \sim n$, quand n tend vers l'infini.

2. On commence par le changement de variable $y = n(x - 1)$. On a $J_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}\, dy$. Maintenant on pose

$$f_n(y) = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}, \quad \varphi(y) = \sqrt{1 + e}, \quad f(y) = \sqrt{1 + e^y}.$$

Alors $|f_n(y)| \leq \varphi(y)$ sur $[0, 1]$ et φ est intégrable sur le domaine. De plus, $lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$. Par le théorème de convergence dominée, $J_n \sim \frac{1}{n} \int_0^1 \sqrt{1 + e^y}\, dy = \frac{2}{n}(\sqrt{1 + e} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} - \ln(\sqrt{1 + e} + 1) + \ln(\sqrt{2} + 1))$.

Exercice IV

I. 1. Par l'absurde, supposons qu'il existe $u \in]a, b[$ où $g(u) = 0$. Par le théorème de Rolle appliqué à g sur l'intervalle $[a, u]$, il existe $v \in]a, u[$ tel que $g'(v) = 0$. Le même théorème sur $[u, b]$ implique qu'il existe $w \in]u, b[$ tel que $g'(w) = 0$. Le même théorème appliqué à g' sur $[v, w]$, implique qu'il existe $z \in]v, w[$ tel que $g''(z) = 0$ ce qui contredit les hypothèses de départ.

2. Par absurde, supposons qu'il existe un $u \in]a, b[$ tel que $g(u) > 0$. Par le théorème des accroissements finis appliqué à g sur $[a, u]$, on trouve $v \in]a, u[$ tel que $g(u)/(u - a) = g'(v)$, donc $g'(v) > 0$. Le même théorème sur l'intervalle $[u, b]$ implique qu'il existe $w \in]u, b[$, tel que $-g(u)/(b - u) = g'(w) < 0$. Pour finir, on applique le même théorème à g' sur $[v, w]$ et on trouve $z \in]v, w[$ tel que

$$g''(z) = \frac{g'(w) - g'(v)}{w - v} < 0.$$

Ceci contredit l'hypothèse $g'' > 0$ sur $[a, b]$.

II. 1. La fonction f étant continue sur $[a,b]$ avec $f(a)<0$ et $f(b)>0$, il existe au moins un point à l'intérieur de l'intervalle où elle s'annule. Si le point n'est pas unique, on aboutit à une contradiction de manière similaire à la partie I. Donc il existe une unique racine c de $f(x)=0$, dans l'intervalle.

2. Les fonctions f' et f'' sont continues sur $[a,b]$, donc leurs images sont des intervalles (théorème des valeurs intermédiaires). Comme $f'(x)>0$, alors $m_1=\inf_{x\in[a,b]} f(x)>0$. On peut prendre $m_2=\sup_{x\in[a,b]} f''(x)$.

3. En effet, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, $g(a)=g(b)=0$ et $g''(x)=f''(x)>0$ pour tout $x\in]a,b[$. D'après I.2. on a $g(c_1)<0$, donc $f(c_1)<0=f(c)$. Comme f est strictement croissante, on a que $a<c_1<c$.

III. 1. Le polynôme

$$P_n(x)=(x-c_n)\frac{f(b)-f(c_n)}{b-c_n}+f(c_n),\ \text{ admet la racine } c_{n+1}=c_n-f(c_n)\frac{b-c_n}{f(b)-f(c_n)},$$

donc $c_{n+1}=\varphi(c_n)$ avec $\varphi(x)=x-f(x)(b-x)/(f(b)-f(x))$.

2. Nous avons démontré $a<c_1<c$. Par récurrence, on peut appliquer la partie II.3 sur $[c_n,c]$ et vérifier que $c_n<c_{n+1}<c$.

3. La suite $\{c_n\}_{n\geq 1}$ est croissante et bornée supérieurement par c, donc elle converge. En supposant que $c_n\to c'$, quand $n\to\infty$, avec $c'\leq c$, on obtient par continuité de φ sur $[a,c]$ que $c'=\varphi(c')$, ce qui implique que $f(c')=0$ et par unicité (partie II.1) on a $c'=c$.

Par un développement de Taylor de $f(c_n)$ autour de c, on obtient pour un u compris entre c_n et c :

$$f(c_n)=f(c)+(c_n-c)f'(u),\ \text{ donc } |c_n-c|=\frac{|f(c_n)|}{f'(u)}\leq\frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

Application numérique : Si on pose $a=1,5$ et $b=2$, on a $c_1=1.8095$, $c_2=1,8549$ et $c_3=1,8601$. L'erreur commise est, d'après IV.3., inférieure à $|f(c_3)|/f'(1,5)=0,0042/2,75=0,0015$.